2К

УДК 519.95: 621.324: 681.3(07)

З.Д. Коноплянко, К.П. Терещук
Львівський інститут банківської справи Університету банківської справи
Національного банку України, м. Львів, Україна
zenovij@ukr.net, kostyatereshchuk@rambler.ru

Дослідження процесів формування класів упорядкованих двомісних *k*-значних функцій та їх застосування в системах штучного інтелекту економіки

У статті викладені комбінаторні властивості двомісних k-значних комутаційних функцій, які дозволяють згрупувати в чергу усі функції у класи, що в свою чергу дає можливість виокремити значну частину впорядкованих функцій, яких легко оцінити. Також частково оцінено деякі суттєво впорядковані функції. В цілому викладені у роботі комбінаторні властивості двомісних k-значних комутаційних функцій дають можливість уникнути надскладних операцій при підрахунку кількості різних функцій, яких можна утворити із породжуючої функції. Розвиток отриманих результатів дозволить оптимізувати роботу комутаційного обладнання.

Вступ

Комбінаторика та логіка як розділи математики використовуються у теорії кодування, яка поки що базується переважно на двозначних зображеннях кодів. Перехід до використання *k*-значної логіки в електронно-обчислювальних машинах потрібний для створення систем штучного інтелекту, здатних до самоорганізації та самопрограмування, вирішення надскладних задач розпізнавання образів мовних та зорових зображень [1-6], проте вимагає нових досягнень у комбінаториці. Потужні системи штучного інтелекту дозволять економічним суб'єктам діяти більш раціонально, адже на сьогоднішній день існує математичний апарат, який дозволяє дослідити чи спрогнозувати ситуацію на ринку, а для точніших розрахунків необхідно брати до уваги щораз більшу кількість інформації.

Метою даної роботи є дослідження властивостей добре впорядкованих двомісних *k*-значних функцій, що застосовуються для вирішення задач економіки, які погано формалізуються і мають тільки мовне подання при створенні систем штучного інтелекту.

1. Постановка задачі

Процедури синтезу *k*-значних комутаційних логічних структур систем штучного інтелекту передбачають наявність двовходових (двовимірних) мультиплексорів, які працюють із *k*-значним структурним алфавітом, що приймає значення з множини $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, і реалізують двомісні функції *k*-значної логіки.

Суперпозицію двомісних функцій *k*-значної логіки записують у вигляді функції двох змінних

$$\Phi = f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)), \quad (1)$$

де *f*(*) – довільна фіксована функція з множини всіх функцій двох *k*-значних змінних (P_k^2), $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)$ – функції, що реалізуються одновходовим універсальним елементом (мультиплексором) і пробігають усю множину функцій з P_k^1 однієї змінної, тобто їх можна записати у вигляді одномірного кортежу.

Усі функції визначені на E_k зі значеннями також в $E_k = \{0, 1, ..., k-1\}$. У подальшому викладі будемо розглядати тільки двомісні функції.

Двомісну *k*-значну комутаційну функцію можна записати у вигляді квадратної матриці (табл. 1). З таким записом функції легко виконувати стандартні матричні операції, такі як перестановка рядів (стовпців), транспонування тощо. Тому дальше будемо спиратися на матричний вигляд функції.

Таблиця 1 – Табличний запис двомісної функції $f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$

f(*)		$\varphi_1(x_1)$			
		0	1	…	(*k*-1)
$\varphi_2(x_2)$	0	e_{00}	e_{01}	…	$e_{0(k-1)}$
	1	e_{10}	e_{11}	…	$e_{1(k-1)}$
	⋮	⋮	⋮	…	⋮
	(*k*-1)	$e_{(k-1)0}$	$e_{(k-1)1}$	…	$e_{(k-1)(k-1)}$

де e_{ij} – значення функції *f*(*).

Суперпозиція (1) породжує k^{2k} двомісних комутаційних функцій, але не всі з них різні [1]. Основна проблема полягає в тому, що немає єдиної аналітичної залежності, яка б дозволила швидко підрахувати кількість різних функцій, які породжує довільна двомісна функція. Ця кількість позначається N_p.

Обчислити N_p за допомогою комп'ютера можна методом прямого перебору. Проте це вимагає великих затрат часу, тому таким способом не завжди можна знайти N_p довільної функції при $k > 3$. Отже, потрібно шукати нові евристичні шляхи значного скорочення перебору, щоб знайти N_p.

2. Властивості двомісних комутаційних функцій

У цьому пункті розглянемо основні властивості двомісних функцій, за якими можна поділити усі функції на класи еквівалентності. За критерієм N_p функції еквівалентні, якщо у породжуючій таблиці істинності:

1) переставляти місцями рядки (стовпці) функції;
2) транспонувати функцію, за аналогією з механізмами теорії матриць;
3) здійснювати перестановки елементів функції.

За цими властивостями виведено число N_f – кількості різних функцій, які можна утворити з однієї шляхом перестановок рядків (стовпців), транспонування та заміни елементів функції. У результаті досліджень, шляхом прямого перебору, поділено усі 3-значні двомісні комутаційні функції на 76 класів еквівалентності. Типові суперпозиції, які відображають кожен клас, та їх властивості (N_p, N_f) досліджені та описані у роботі [5]. Із отриманих результатів видно, що існує декілька класів еквівалентності, функції яких породжують однакову кількість різних суперпозицій, тобто немає чіткої залежності між виглядом суперпозиції та її N_p.

Тепер детальніше розглянемо властивості N_f.

Розглянемо *першу властивість*. Позначимо кожен рядок (стовпець) відповідним числом. Тоді, якщо усі рядки (стовпці) у таблиці істинності різні, отримуємо кортеж

із різними числами (0, 1, 2, …, k-1). Таких перестановок буде k!. Але якщо не всі рядки (стовпці) різні, наприклад, тільки 2 рядки, яких можна записати кортежем (0, 0, 1) чи (0, 1, 1), то кількість таких розміщень буде $\Phi(3,2)2! = 3 \cdot 2 = 6$, тобто $(0\ \ 0\ \ 1)$, $(0\ \ 1\ \ 0)$, $(0\ \ 1\ \ 1)$, $(1\ \ 0\ \ 0)$, $(1\ \ 0\ \ 1)$, $(1\ \ 1\ \ 0)$, або для загального варіанта $\Phi(k,i)i!$ (кількість розміщень і визначених елементів у кортежі розміру k), де $\Phi(k,i) = \frac{1}{i} \sum_{k_1,\dots,k_k} \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_k!}$ – числа Стирлінга 2-го роду (числа розбиттів k-елементної множини на i блоків), причому

$$\Phi(k,k) = 1, \text{ при } k > 0;$$
$$\Phi(k,0) = 0, \text{ при } k > 0;$$
$$\Phi(k,i) = \Phi(k-1,i-1) + i\Phi(k-1,i), \text{ при } 0 < i < k \text{ [1, 2].}$$

То ж тільки за цією ознакою знайдеться певна кількість функцій, які об’єднує те, що кожну з них можна звести до однієї за допомогою перестановок рядків (стовпців). Число таких функцій буде залежати від самого виду функції, з якої можна утворити ці функції шляхом перестановок рядків і перестановок стовпців, але не буде перевищувати добуток кількості можливих розміщень рядків на кількість можливих розміщень стовпців.

Друга властивість передбачає транспонування функції. Коли ми хочемо знайти N_f, тоді, якщо функцію не можна транспонувати за допомогою перестановок рядків чи перестановок стовпців, то при обчисленні N_f нам потрібно враховувати транспонування шляхом множення результату кількості функцій, отриманих із першої властивості, на 2, а інакше транспонування не враховуємо.

Третя властивість полягає у тому, що одні елементи можна замінювати на інші. Цю властивість враховуємо при обчисленні N_f тоді, коли одні елементи не можна замінити на інші за допомогою двох перших властивостей (шляхом перестановок рядків (стовпців) чи транспонування). Наприклад, у функції $f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) = \min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$ (табл. 3) число нулів не дорівнює числу одиниць чи двійок і кількість одиниць не рівна кількості двійок, тобто існує k елементів із різною їх кількістю (необхідна, але недостатня умова для врахування цієї властивості при обчисленні N_f). Тому із функції $\min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)$ за даною властивістю можна утворити $A_k^k = k!$ різних функцій (табл. 2).

Таблиця 2 – Значення функції $f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) = \min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$, які вона набуває шляхом перестановок її елементів

$f(*)$		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	0	0	0
	1	0	1	1
	2	0	1	2

$f(*)$		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	0	0	0
	1	0	2	2
	2	0	2	1

$F(*)$		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	1	1	1
	1	1	0	0
	2	1	0	2

$f(*)$		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	1	1	1
	1	1	2	2
	2	1	2	0

$f(*)$		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	2	2	2
	1	2	0	0
	2	2	0	1

$f(*)$		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	2	2	2
	1	2	1	1
	2	2	1	0

3. Дослідження окремих класів впорядкованих функцій

1. Упорядковані функції виду $f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) = const$.

Для такого виду упорядкованих функцій число $N_f = 3$ при $k = 3$. Очевидно з ростом k отримуємо $N_f = k$.

2. Наступний клас упорядкованих функцій виду $\min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$ (табл. 3)

Таблиця 3 – Табличний запис двомісної функції другого роду $\min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$

$f(*) = \min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	0	0	0
	1	0	1	1
	2	0	1	2

Для такого виду функцій число $N_f = 216$ при $k = 3$. Це залежить від того, що усі рядки і стовпці функцій даного виду є різними, тому при перестановках рядків (стовпців) утвориться $k!{\cdot}k! = (k!)^2$ різних функцій (згідно з першою властивістю N_f). У даному випадку транспонування функції (друга властивість) не враховуємо при обчисленні N_f, тому що дана функція є симетричною відносно основної діагоналі, тобто її можна транспонувати шляхом перестановок рядків чи стовпців, що вже було враховано. Також дана функція має найбільше число нулів, потім одиниць і так далі, тобто усі k елементів зустрічаються різну кількість разів. Тому можемо легко обчислити кількість функцій, отриманих шляхом заміни одних елементів на інші (третя властивість, табл. 2) . Таких функцій можна утворити $A_k^k = k!$. Отже, використовуючи основне правило комбінаторики, маємо $N_f = (k!)^2 k! = (k!)^3$.

3. Тепер розглянемо іще один клас функцій виду $(\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)) \bmod k$ (табл. 4).

Таблиця 4 – Табличний запис двомісної функції третього роду $(\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)) \bmod k$

$f(*) = (\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)) \bmod k$		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	0	1	2
	1	1	2	0
	2	2	0	1

Число функцій даного виду є $N_f = 12$ при $k = 3$. Таке мале число функцій пояснюється тим, що усі елементи функції можна замінити за допомогою перестановок рядків (стовпців), через що не враховуємо третю властивість N_p, а також і тим, що кожен рядок функції дорівнює відповідному стовпцю і має у своєму складі усі k елементів, що приводить до того, що якщо ми зробимо $k!$ перестановок рядків і $k!$ перестановок стовпців (разом $(k!)^2$), то усі згенеровані функції будуть повторюватись рівно k разів. Звідси $N_f = \dfrac{(k!)^2}{k}$.

4. Класи впорядкованих функцій виду $f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) = g(\varphi_1(x_1))$.

У такого виду впорядкованих функцій $N_f = 36 + 12 = 48$ при $k = 3$. Оскільки функції даних класів залежать тільки від однієї змінної (табл. 5), то їх N_f нескладно порахувати за допомогою загальних комбінаторних правил:

$N_f = 2\sum_{i=2}^{k} \Phi(k,i)A_k^i = 2(k^k - k)$, де $\Phi(k,i)$ – числа Стирлінга другого роду. Вираз $\Phi(k,i)A_k^i$ відображає число розміщень k елементів у k-елементному кортежі так, щоб кількість різних елементів у ньому дорівнювала i. Дана формула враховує перестановку рядків, транспонування функції, перестановку стовпців та заміну елементів функції.

Таблиця 5 – Табличний запис двомісних функцій, які залежать від однієї змінної

f(*)		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	0	0	0
	1	0	0	0
	2	1	1	1

f(*)		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	0	0	0
	1	1	1	1
	2	2	2	2

Висновки

1. Серед усіх можливих двомісних k-значних комутаційних функцій існують суттєво впорядковані функції, які можна об’єднати у класи за принципом того, що кожну функцію певного класу можна звести до будь-якої іншої функції цього ж класу за допомогою перестановок рядків, перестановок стовпців, транспонування і перестановок елементів функції, в результаті чого N_p не зміниться.
2. Існує залежність між виглядом функції та N_f – числом функцій, які входять до її класу еквівалентності, на основі чого оцінено класи найпростіших суттєво впорядкованих функцій.
3. Дослідження упорядкованих функцій дозволяє скоротити перебір при підрахунку числа різних функцій, які породжує довільна двомісна функція.

Література

1. Бондаренко М.Ф., Коноплянко З.Д., Четвериков Г.Г. Основи теорії багатозначних структур і кодування в системах штучного інтелекту. – Х.: Фактор-Друк, 2003. – 336 с.
2. Коноплянко З.Д., Чаплига В.М., Чаплина М.В. Багатозначні структури та кодування систем економічної кібернетики. – Львів: ЛБІ НБУ, 2004. – 314 с.
3. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. – К.: Видавнича група BHV, 2007. – 368 с.
4. Реализация многозначных структур автоматики / Под ред. М.А. Ракова. – К.: Наук. думка, 1976. – 350 с.
5. Коноплянко З.Д., Терещук К.П. Дослідження метричних властивостей k-значних функцій // Международная научно-практическая конференция «Современные направления теоретических и прикладных исследований’2008», 15 – 25 марта 2008 г., Одесса, Украина. – С. 37-42.
6. Коноплянко З.Д., Терещук К.П. Алгоритм обчислення N_p у сфері досліджень метричних властивостей k-значних функцій // Международная научно-практическая конференция «Современные направления теоретических и прикладных исследований’2008», 15 – 25 марта 2008 г., Одесса, Украина. – С. 42-46.

З.Д. Коноплянко, К.П. Терещук

Исследование процессов формирования классов упорядоченных двухместных k-значных функций и их применение в системах искусственного интеллекта экономики

В статье изложены комбинаторные свойства двухместных k-значных коммутационных функций, которые позволяют сгруппировать все функции в классы, что в свою очередь даёт возможность выделить значительную часть упорядоченных функций, которые легко оценить. Также частично оценены некоторые существенно упорядоченные функции. В целом изложенные в работе комбинаторные свойства двухместных k-значных коммутационных функций дают возможность избежать излишне сложных операций при подсчёте количества различных функций, которые можно создать из порождающей функции. Развитие полученных результатов позволит оптимизировать работу коммутационного оборудования.

Стаття надійшла до редакції 22.05.2008.